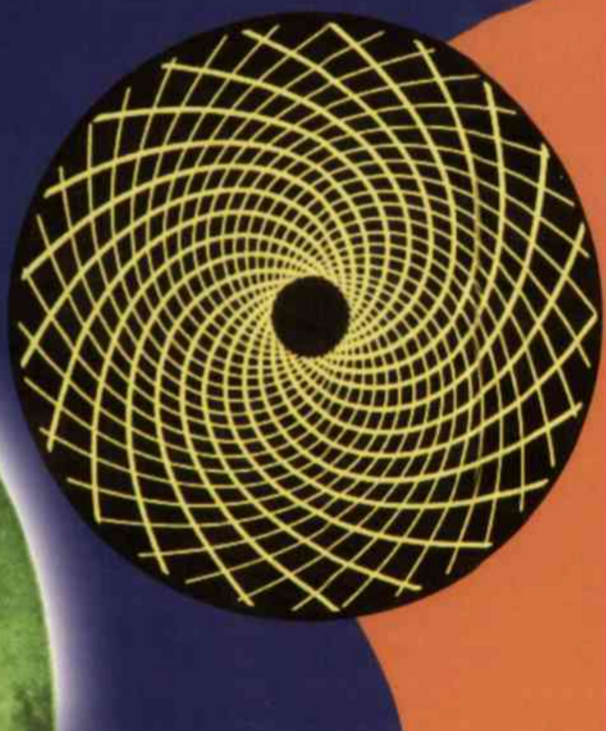
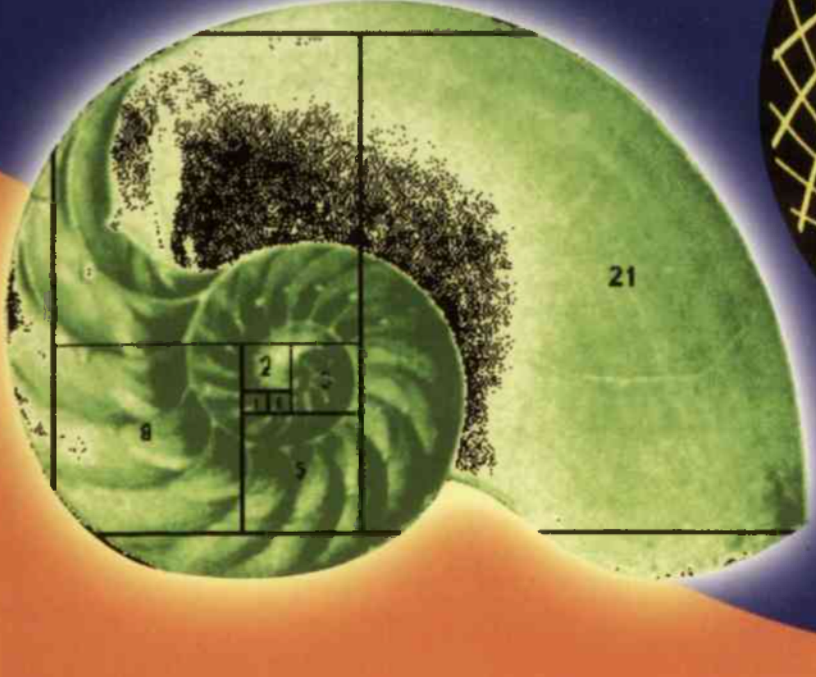
PHAN HUY THIỆN

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

DÙNG CHO SINH VIÊN CÁC TRƯỜNG KỸ THUẬT VÀ CÔNG NGHỆ





NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

PHAN HUY THIỆN

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

DÙNG CHO SINH VIÊN CÁC TRƯỜNG KỸ THUẬT VÀ CÔNG NGHỆ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

805–2010/CXB/12–1301/GD Mã số: 7B796Y0–DAI

MỤC LỤC

Chương 6. PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE VÀ FOURIER

Chương 7. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN BẰNG CHUỖI

Chương 8. PHƯƠNG PHÁP HÀM RIÊNG VÀ TRỊ RIÊNG

Chương 9. CÁC HÀM ĐẶC BIỆT ỨNG DỤNG TRONG VẬT LÝ VÀ KỸ THUẬT

Chương 10. CÁC PHÉP TÍNH BIẾN PHÂN

Chương 1
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

§ 1.1. KHÁI NIỆM CHUNG

Phương trình vi phân là phương trình chứa hàm số chưa biết (thường gọi là biến phụ thuộc y), biến số độc lập x và các đạo hàm của hàm số chưa biết (hoặc các vi phân của nó). Nhiều hệ vật lý, hoá học và sinh học... có thể được mô tả bằng mô hình toán học. Khi mô hình được xây dựng ta thường phải giải phương trình, trong đó đa số là phương trình vi phân để dự báo và định lượng các tính chất và đặc trưng của hệ đang được mô hình hoá. Do mục đích cuốn sách, chúng ta thường xét các phương trình vi phân có nghiệm dưới dạng biểu diễn sơ cấp, tức là các nghiệm tồn tại và có thể biểu thị dưới dạng các hàm cơ bản như $\exp x$, $\ln x$, $\sin x$,... Tuy nhiên, có một số phương trình không thể viết nghiệm dưới dạng biểu diễn sơ cấp, khi đó có thể biểu thị qua một chuỗi vô hạn.

Ví dụ 1.1. Các phương trình Volterra – Lotka là các phương trình vi phân dùng để mô hình hoá các tương tác giữa vật săn mồi và con mồi trong việc xác lập các quần thể sinh học (như cá lớn và cá bé, mèo và chuột,...) với các giả thiết:

– Số lượng con mồi sẽ tăng theo hàm mũ nếu không có vật săn mồi là Ax;

– Số lượng vật săn mồi sẽ giảm theo hàm mũ nếu không có con mồi là $-Cy$;

– Số lượng con mồi giảm xuống liên quan đến tần số vật săn mồi gặp con mồi, kết quả là ăn thịt con mồi là $-Bxy$;

– Số lượng vật săn mồi tăng lên liên quan đến tần số vật săn mồi gặp con mồi, kết quả là ăn thịt con mồi là Dxy.

Sử dụng các giả thiết trên, ta đưa ra phương trình Volterra – Lotka đối với hệ hai chiều vật săn mồi và con mồi được tăng trưởng theo hàm mũ. Ta có hệ phương trình vi phân sau

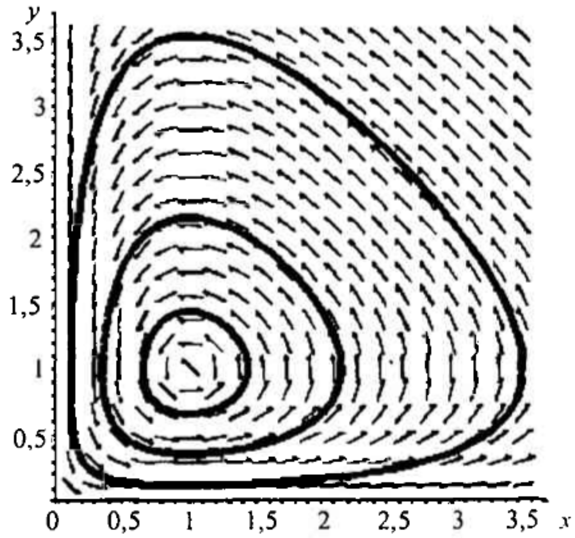
$$F\left(x(t),y(t)\right)=\begin{cases}\dot{x}=Ax-Bxy=x\left(A-By\right)\\ \dot{y}=-Cy+Dxy=y\left(-C+Dx\right),\end{cases}$$

trong đó: x đặc trưng cho độ lớn của số lượng con mồi; y đặc trưng cho độ lớn của số lượng vật săn mồi.

Tỷ lệ tăng trưởng đối với mỗi số lượng được xác định bằng biểu thức của x, y phụ thuộc vào thời gian t, nhưng t không có mặt trong phương trình. Các hằng số A, B, C và D là các hằng số dương.

Các giả thiết trên được mô tả trên một hệ kín chỉ có hai loài ảnh hưởng lẫn nhau, không có tác động bên ngoài nào ảnh hưởng đến hệ như tác động của môi trường hay có mặt một loài khác. Tất nhiên, mô hình trên là phi thực tế, nhưng nó cho một bức tranh để nghiên cứu số lượng các động vật. Có thể mở rộng mô hình trên cho một hệ nhiều hơn hai đối với các động vật ăn thịt lẫn nhau.

Các điểm dừng của hệ tăng trưởng theo hàm mũ là $(x, y) = (0,0)$, $(C/D, A/B)$. Điểm dừng $(0,0)$ không đáng quan tâm, nhưng điểm dừng thứ hai cho thấy tính chất động học của việc phát triển số lượng các vật, ta quan tâm đến điểm dừng này là bền hay tiệm cận bền, tức là tính ổn định của các điểm dừng. Hình 1.1 cho từ quỹ đạo ngoài cùng đến trong cùng với điểm ổn định là $(1, 1)$.◄



Hình 1.1. *Quỹ đạo không gian pha của hệ Volterra – Lotka với các điều kiện ban đầu* $(x(0), y(0)) = (0{,}25,\ 0{,}25); (0{,}5,\ 0{,}5); (0{,}75,\ 0{,}75)$

Trong phương trình vi phân, nếu hàm cần tìm chỉ phụ thuộc một biến độc lập, phương trình đó được gọi là *phương trình vi phân thường* (ordinary differential equation – ODE). Nếu hàm cần tìm phụ thuộc vào hai hoặc nhiều biến độc lập, phương trình được gọi là *phương trình vi phân đạo hàm riêng* (partial differential equation – PDE).

Ví dụ 1.2. Định luật II Newton là một phương trình vi phân thường:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x, t, \frac{dx}{dt}\right),$$

trong đó: $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ là gia tốc; $\dfrac{dx}{dt}$ là vận tốc; x là toạ độ; t là thời gian. ◄

Ví dụ 1.3. Phương trình dao động của một sợi dây căng đàn hồi là một phương trình vi phân đạo hàm riêng:

$$u_{tt} = a^2u_{xx} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, a = \text{const}.$$ ◄

Trong cuốn sách này, chủ yếu nghiên cứu các phương trình vi phân thường.

Cấp của phương trình vi phân là cấp của đạo hàm cao nhất xuất hiện trong phương trình. Như vậy, phương trình chỉ chứa đạo hàm dy/dx, nhưng không chứa đạo hàm cấp cao hơn được gọi là *phương trình vi phân cấp 1*; phương trình chứa đạo hàm d^2y/dx^2, nhưng không chứa đạo hàm cấp cao hơn được gọi là *phương trình vi phân cấp 2,...*

Trong chương này ta xét phương trình vi phân cấp 1.

Bậc của phương trình vi phân xác định bởi số luỹ thừa trong biểu thức của đạo hàm cao nhất sau khi đã biến đổi phương trình, sao cho bậc của đạo hàm chỉ chứa luỹ thừa nguyên. Số luỹ thừa của biến độc lập hoặc số luỹ thừa của đạo hàm thấp hơn đạo hàm cao nhất không đóng vai trò xác định bậc của phương trình.

Ví dụ 1.4. Xác định cấp và bậc của phương trình vi phân

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\cos x\left(\frac{dy}{dx}\right)^{3/7} + x^5y = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^7 + (x\cos x)^7\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \left(x^5y\right)^7 = 0.$$

Đây là phương trình vi phân cấp 2, bậc 7. ◄

Tích phân của phương trình vi phân là một hay nhiều phương trình liên kết các hàm số chưa biết và các biến số độc lập, sao cho phương trình vi phân đã cho trở thành đồng nhất thức khi ta thay vào phương trình đó các hàm số chưa biết và các đạo hàm của nó có mặt trong phương trình.

Nghiệm tổng quát của một phương trình vi phân là hàm tổng quát $y(x)$ thoả mãn phương trình. Đối với phương trình vi phân cấp 1, nghiệm tổng quát chứa một hằng số tích phân được xác định bằng các điều kiện biên thích hợp. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp *n* chứa *n* hằng số tuỳ ý của tích phân, vì vậy cần *n* điều kiện biên để xác định *n* hằng số này. Khi các điều kiện biên xác định được các hằng số, nghiệm tìm được gọi là *nghiệm riêng* của phương trình vi phân đã cho.

Khi một nghiệm bất kỳ của phương trình vi phân được tìm thấy, chúng luôn luôn có thể kiểm tra được bằng cách thay vào phương trình gốc và thoả mãn bất cứ điều kiện biên nào đã cho.

Tìm những tích phân của phương trình vi phân gọi là *phép tích phân* của phương trình đó.

Tích phân của phương trình vi phân không đơn trị, nó có thể chứa những đại lượng không đổi hay những hàm số có thể chọn một cách tuỳ ý.

Để xác định nghiệm đơn trị, người ta đặt cho các hàm số chưa biết các điều kiện bổ sung, gọi là các *điều kiện ban đầu* (initial conditions) hay các *điều kiện biên* (boundary conditions) để buộc cho các hàm số chưa biết và cả một số đạo hàm của nó phải lấy các giá trị cho trước tại những giá trị xác định của biến số độc lập. Với những điều kiện bổ sung ấy, nghiệm của bài toán sẽ đơn trị. Một phương trình là *tuyến tính* nếu nó là bậc 1, không chứa các tích của hàm cần tìm và các đạo hàm của nó. Một phương trình là *phi tuyến* nếu nó không tuyến tính.

Bài toán tìm nghiệm của phương trình vi phân với các điều kiện ban đầu hay điều kiện biên đã cho được gọi là *bài toán Cauchy*. Bài toán Cauchy tương đương với việc tìm đường cong tích phân đi qua một điểm nào đó cho trước. Với một số điều kiện hay giả thiết kèm theo, nghiệm của bài toán Cauchy tồn tại và duy nhất.

Một số phương trình vi phân còn có các *nghiệm kỳ dị*[1], tức là tại mỗi điểm của nó tính duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy bị phá vỡ, các nghiệm này không chứa các hằng số tuỳ ý và không thể tìm được nghiệm tổng quát.

§ 1.2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1 VÀ TRƯỜNG HƯỚNG

1. Phương trình vi phân cấp 1

Phương trình vi phân cấp 1 là phương trình có dạng tổng quát

$$F(x, y, y') = 0,\ y' = \frac{dy}{dx}. \tag{1.1}$$

Nghiệm của phương trình (1.1) là hàm $y = y(x)$ sao cho khi thay vào (1.1) ta được đồng nhất thức. Có vô số nghiệm để khi thế vào phương trình (1.1) ta được đồng nhất thức. Quá trình tìm các nghiệm của phương trình (1.1) gọi là *tích phân* phương trình đó. Nếu từ phương trình (1.1) có thể suy ra y', tức là

---

[1] Nghiệm và điểm kỳ dị sẽ được trình bày chi tiết trong chương 7.

$$y' = f(x, y) \qquad (1.2)$$

thì phương trình (1.2) được gọi là *phương trình vi phân cấp 1 giải ra được* đối với đạo hàm.

2. Định lý tồn tại nghiệm Cauchy

Nếu $f(x, y)$ liên tục trong một miền nào đó bao quanh điểm (x_0, y_0), tức là khi $|x - x_0| < a$, $|y - y_0| < b$ $(a > 0, b > 0)$, thì tồn tại ít nhất một nghiệm của phương trình (1.2) lấy giá trị y_0 khi $x = x_0$, xác định và liên tục trong một khoảng nào đó quanh x_0. Ngoài ra, nếu trong miền đó điều kiện sau được thoả mãn

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < N|y_1 - y_2|, \qquad (1.3)$$

trong đó: N là hằng số nào đó không phụ thuộc vào x, y_1, y_2, thì nghiệm đó là duy nhất và là hàm số liên tục tại x_0. Điều kiện (1.3) được gọi là *điều kiện Lipsit*. Điều kiện Lipsit rõ ràng được thực hiện nếu $f(x, y)$ có đạo hàm riêng $\partial f / \partial y$ giới nội trong miền đang xét.

3. Trường hướng

Nếu đồ thị nghiệm $y = \varphi(x)$ của phương trình $y' = f(x, y)$ đi qua điểm $M(x, y)$, thì hệ số góc tiếp tuyến với đồ thị tại điểm $M(x, y)$ (bằng dy/dx) có thể xác định trực tiếp từ phương trình vi phân. Do đó, phương trình vi phân xác định tại mỗi điểm *hướng* của tiếp tuyến với đồ thị của nghiệm. Tập hợp những hướng đó lập nên một *trường hướng*. Mỗi điểm cùng với hướng tại đó gọi là một *phần tử* của trường hướng. Tích phân một phương trình vi phân cấp 1 về mặt hình học được quy về việc nối các phần tử thành đường cong tích phân mà tiếp tuyến tại mỗi điểm có hướng trùng với hướng của trường hướng.

Đường cong mà tại mỗi điểm của nó hướng của trường hướng không thay đổi được gọi là *đường đẳng phục*. Như vậy, phương trình đường đẳng phục có dạng $f(x, y) = c$ (c là hằng số).

Đường đẳng phục không trùng với đường cong tích phân.

Trong một số trường hợp gặp phải trường hướng, trong đó có cả những hướng thẳng đứng – tương ứng với hàm $f(x, y) = \infty$, khi đó có thể thay đổi vai trò của biến số phụ thuộc và biến số độc lập, tức là biến đổi $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{f(x, y)}$ sẽ tương đương với phương trình đã cho. Tập hợp các đường cong tích phân sẽ phụ thuộc vào một tham số, và phương trình của họ các đường cong tích phân là *tích phân tổng quát* của phương trình vi phân cấp 1 (chứa một hằng số tuỳ ý). Muốn thu được nghiệm riêng $y = \varphi(y)$ thoả mãn $y_0 = \varphi(x_0)$, từ tích phân tổng quát $F(x, y, c) = 0$ ta xác định c qua phương trình $F(x_0, y_0, c) = 0$.

Ví dụ 1.5. Vẽ trường hướng của phương trình vi phân $y' = y - x$. Sau đó, vẽ tập hợp các đường cong tích phân cho phương trình vi phân này.

Giải: Để vẽ trường hướng cho phương trình vi phân trên, trước hết ta tìm các vị trí, trong đó đạo hàm là một hằng số làm thành các đường đẳng phục. Để làm được điều đó, cho đạo hàm bằng c, ta thu được một họ các phương trình được gọi là *họ các đường đẳng phục*, tại đó đạo hàm bằng c. Trong trường hợp này ta có

$$c = y - x.$$